Mgr inż. Władysław Paszek

Zakład Maszyn Elektrycznych

Praca maszyny synchronicznej przy stałym poślizgu

Streszczenie: W oparciu o dwuosiową teorię analizuje się przebiegi prądu obwodów stojana i wirnika oraz przebiegi momentu maszyny synchronicznej pracującej przy stałym poślizgu. Dla nieznacznych poślizgów uwzględnia się wpływ małych oporności czynnych obwodów twornika.

1. Określenie założeń do analizy

Zakłada się stałą szybkość kątową wirnika maszyny synchronicznej $\omega = \omega_N + \beta$.

Do zacisków twornika przyłożono sztywne napięcie sieci o częstotliwości ω_N.

Nadwyżka szybkości kątowej wirnika ponad szybkość znamionową odpowiadającą częstotliwości sieci określona jest jako częstotliwość poślizgu.

Poślizg s wyraża się:

$$s = \frac{\omega - \omega_s}{\omega_s} = \frac{\omega_N + \beta - \omega_N}{\omega_N} = \frac{\beta}{\omega_N}.$$

Zakłada się w odróżnieniu do zwykle używanych wzorów w teorii maszyny asynchronicznej poślizg dodatni przy nadsynchronizmie.

Analiza pracy maszyny synchronicznej pozwala ocenić ilościowo pracę maszyny w czasie dynamicznych przebiegów nieustalonych przy poślizgach wirnika względem pola wirującego stojana oraz tak zwaną pracę asynchroniczną maszyny synchronicznej po utracie wzbudzenia, która nabiera coraz większego znaczenia w energetyce.

Również przebiegi zachodzące przy samosynchronizacji po przyłączeniu generatora niewzbudzonego do sieci i następnie w czasie narastania prądu wzbudzenia wyjaśniają się na podstawie analizy założonego wypadku pracy. Analizę przeprowadzi się w oparciu o dwuosiową teorię maszyny synchronicznej, trójfazowej, przyłączonej trójprzewodowo do sieci.

Przy przyporządkowywaniu składowym w osi podłużnej wirnika indeksu D, składowym w osi poprzecznej indeksu Q wychodzi się z podstawowych równań maszyny synchronicznej, które wiążą napięcia i prądy:

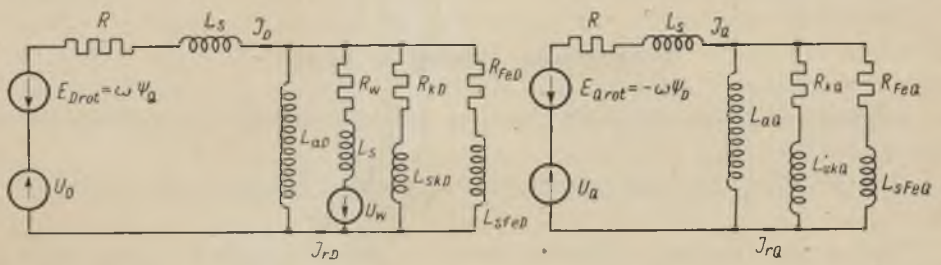
$$U_D = \Psi_Q \omega - \frac{d\Psi_D}{dt} - I_D R,$$

$$U_Q = -\Psi_D \omega - \frac{d\Psi_Q}{dt} - I_Q R, \tag{1}$$

oraz moment i prądy (dodatni moment działa na wirnik w kierunku przeciwnym do kierunku obrotów)

$$M_e = -[L_{aD} I_Q I_{rD} + (L_{aD} - L_{aQ}) I_Q I_D - L_{aD} I_D I_{rQ}]_r \tag{2}$$

jako też z podstawowych schematów zastępczych w osi podłużnej i poprzecznej (rys. 1). Dla uproszczenia skomplikowany układ zastępczy



Rys. 1. Schemat zastępczy maszyny synchronicznej: oś podłużna – oś poprzeczna

bloku litego wirnika i klatki zastąpiono jedną gałęzią klatki tłumiącej. Odnośne wartości składowych osiowych wielkości W_D, W_Q wyrażają się za pomocą wartości fazowych W_k:

$$W_D = F_D(W_k), \qquad k = a,b,c,$$

$$W_Q = F_Q(W_k), \qquad k = a,b,c, \tag{3a}$$

i odwrotnie, wartości fazowe wyraża się za pomocą składowych osiowych:

$$W_k = f_k(W_D, W_Q), \qquad k = a,b,c. \tag{3b}$$

Przy założeniu napięć sinusoidalnych (sieci rzływnej) przyłożonych do zacisków twornika:

$$U_a = U_m \sin(\omega_N t + \varepsilon_0),$$

$$U_b = U_m \sin\left(\omega_N t + \varepsilon_0 - \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$U_c = U_m \sin\left(\omega_N t + \varepsilon_0 - \frac{4\pi}{3}\right)$$

otrzymuje się przy założeniu wartości kątów początkowych napięcia sieci ε_0 i położenia wirnika α_0:

$$\alpha_0 = \varepsilon_0,$$

$$U_D = \frac{2}{3}\left[U_a \cos(\omega t + \alpha_0) + U_b \cos\left(\omega t + \alpha_0 - \frac{2\pi}{3}\right) + U_c \cos\omega t + \alpha_0 - \frac{4\pi}{3}\right] = -U_m \sin \beta t,$$

$$U_Q = -\frac{2}{3}\left[U_a \sin(\omega t + \alpha_0) + U_b \sin\left(\omega t + \alpha_0 - \frac{2\pi}{3}\right) + U_c \sin\left(\omega t + \alpha_0 - \frac{4\pi}{3}\right)\right] = -U_m \cos \beta t.$$

Przy stałej wartości napięcia wzbudzenia założony przebieg napięć U_D i U_Q określa jednoznacznie przebiegi elektromagnetyczne rozpatrywane w stanie ustalonym.

Rozwiązanie przeprowadzi się metodą superpozycji przy przyjęciu:

a) $U_D = U_Q = 0, \quad U_w \neq 0,$

b) $U_D \neq 0, \quad U_Q \neq 0, \; U_w = 0.$

2. Przebiegi prądów

Ad a. Wypadek ten odpowiada pracy maszyny synchronicznej w stanie zwarcia ustalonego. Ogólnie w stanie ustalonym symetrycznym z rozwiązania układu równań (1) wynika stałość liniozwojów osi podłużnej i poprzecznej

$$\frac{d\Psi_D}{dt} = \frac{d\Psi_Q}{dt} = 0.$$

Tym samym nie pojawia się siła elektromotoryczna transformacji i napięcia przyłożone twornika równoważą się tylko siłami elektromotorycznymi rotacji $(\omega\Psi)$ [1] i spadkami napięć na oporach czynnych:

$$E_{D\,\mathrm{rot}} = \omega\Psi_Q = I_Q\omega(L_s + L_{aQ}) = I_Q\omega L_Q,$$

$$E_{Q\,\mathrm{rot}} = -\omega\Psi_D = -[I_D\omega(L_s + L_{aD}) + I_w\omega L_{aD}] = -[I_D\omega L_D + I_w\omega L_{aD}],$$

$$U_D = +I_Q\omega L_D - I_D R,$$

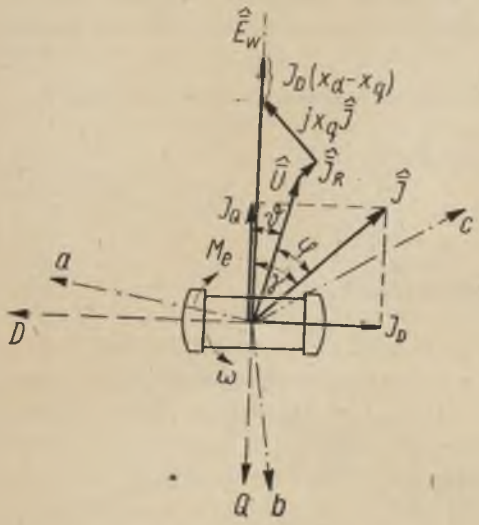
$$U_Q = -I_D\omega L_D - I_w\omega L_{aD} - I_Q R. \tag{4}$$

[1] Przyjęto, że SEM rotacji pochodzi od całkowitego strumienia liniozwojów danej fazy, a zatem strumienia głównego oraz strumienia rozproszenia. W przypadku sieci elastycznej do reaktancji rozproszenia można dołączyć symetryczne reaktancje sieci włączone w szereg z uzwojeniem twornika rozpatrywanej maszyny synchronicznej.

Wprowadzając oznaczenia $L\omega_N = X$, $I_w X_{aD} = E_w$ oraz przyjmując płaszczyznę zespoloną wirującą wraz z wirnikiem, utworzoną przez oś rzeczywistą przyporządkowaną osi D i oś urojoną przyporządkowaną osi Q, otrzymuje się równanie wiążące wektory płaskie $\hat{E}_Q$, $\hat{U}$, $\hat{I}$ wyrażone jako liczby zespolone:

$$\hat{E}_w(1+s) = \hat{U} + \hat{I}[R + jX_Q(1+s)] + \hat{I}_D j(X_D - X_Q)(1+s). \tag{5}$$

Rysunek 2 przedstawia stosowany ogólnie wykres wektorowy maszyny synchronicznej przy poślizgu $s = 0$ ilustrujący otrzymane równanie (5). (Figurujące we wzorach wyrazy zawierające poślizg wirnika wynikają z mniejszej od znamionowej szybkości wirnika).



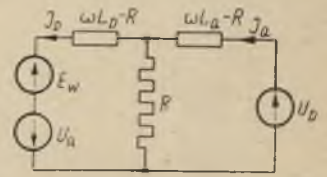
Rys. 2. Wykres wektorowy maszyny synchronicznej dla pracy ustalonej przy poślizgu $s = 0$

Przez rzutowanie wirujących promieni prądów i napięć na osie faz a, b, c otrzymuje się zgodnie z wzorem (3) wartości chwilowe prądów i napięć odnośnych faz.

Dla takiego wypadku ustalonego obciążenia symetrycznego ogólny schemat maszyny synchronicznej na rysunku 1 można znacznie uprościć przy uwzględnieniu, że obwody elektryczne wirnika prócz uzwojenia wzbudzenia nie odgrywają żadnej roli wskutek braku SEM transformacji.

Jedyny wpływ wirnika na pracę maszyny leży w różnej przewodności strumienia w osi podłużnej i poprzecznej.

Rysunek 3 przedstawia taki schemat zastępczy maszyny dla pracy ustalonej symetrycznej. Układ ten odpowiada schematowi dwóch obwodów sprzężonych ze sobą opornością czynną.



Rys. 3. Schemat zastępczy maszyny synchronicznej dla pracy ustalonej przy poślizgu $s = 0$

Przy małych wartościach oporności czynnych w stosunku do biernych jest to stosunkowo słabe sprzężenie.

W przypadku nieznacznych oporności czynnych sprzężenie to można pominąć i układ rozpada się na 2 niezależne obwody. (Ta własność może być wyzyskana przy zastosowaniu analizatora do wyznaczenia rozpływu prądów oddzielnie w obu osiach).

Dla rozpatrywanego szczególnego przypadku zwarcia ustalonego generatora otrzymuje się przy założeniu $U_D = U_Q = 0$ w schemacie zastępczym na rysunku 3:

$$I_D = I_{ED} = -\frac{E_w X_Q (1+s)^2}{(1+s)^2 X_Q X_D + R^2},$$

$$I_Q = I_{EQ} = -\frac{E_w R (1+s)}{(1+s)^2 X_Q X_D + R^2}. \tag{6}$$

Ad b. Ponieważ napięcia U_D i U_Q wyrażają się jako funkcje sinusoidalne, rozwiązuje się równanie (1) przy użyciu metody symbolicznej:

$$\hat{U}_D = \hat{\Psi}_Q \omega - \frac{d\Psi_D}{dt} - \hat{I}_{UD} R,$$

$$\hat{U}_Q = -\Psi_D \omega - \frac{d\Psi_Q}{dt} - I_{UQ} R; \tag{7}$$

wprowadzając

$$\frac{d\hat{\Psi}_m}{dt} = \hat{U}_{xm} = \hat{I}_{Um} \hat{Z}_{ms}, \qquad m = D,Q$$

$$\hat{\Psi}_m = \frac{1}{j\beta} \hat{I}_m \hat{Z}_{ms}, \qquad m = D,Q$$

otrzymuje się po wstawieniu do wzoru (7)

$$\hat{U}_D = \hat{I}_{UQ} \frac{\omega}{j\beta} \hat{Z}_{Qs} - \hat{I}_{UD} (\hat{Z}_{Ds} + R),$$

$$U_Q = -\hat{I}_{UD} \frac{\omega}{j\beta} \hat{Z}_{Ds} - \hat{I}_{UQ} (\hat{Z}_{Qs} + R). \tag{8}$$

Indeks s przy impedancjach zaznacza, że impedancje obliczono dla częstotliwości poślizgu.

Rozwiązanie równania ze względu na $\hat{I}_D, \hat{I}_Q$:

$$\hat{I}_{UD} = \frac{\hat{Z}_{Qs} \left(\hat{U}_D + \frac{\omega}{j\beta} \hat{U}_Q \right) + \hat{U}_D R}{\hat{Z}_{Qs} \hat{Z}_{Ds} \frac{\omega^2 - \beta^2}{\beta^2} - (\hat{Z}_{Ds} + \hat{Z}_{Qs}) R - R^2}, \tag{9}$$

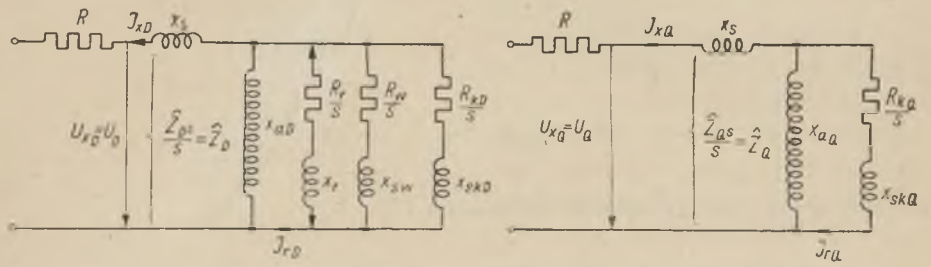
$$\hat{I}_{UQ}=\frac{\hat{Z}_{Ds}\left(-\hat{U}_D\frac{\omega}{j\beta}+\hat{U}_Q\right)+\hat{U}_Q R}{\hat{Z}_{Qs}\hat{Z}_{Ds}\frac{\omega^2-\beta^2}{\beta^2}-(\hat{Z}_{Ds}+\hat{Z}_{Qs})R-R^2}. \tag{9a}$$

Ograniczając analizę do zakresu niewielkich poślizgów i pomijając małe wyższych rzędów poślizgu oraz małe wyższych rzędów wnoszone przez znikome oporności czynne twornika, otrzymuje się uwzględniając, że $\hat{U}_Q=j\hat{U}_D$,

$$\hat{I}_{UD}=\hat{U}_D\frac{s}{\hat{Z}_{Ds}}\left[1+\frac{Rs}{\hat{Z}_{Qs}}+Rs^2\left(\frac{1}{\hat{Z}_{Ds}}-\frac{1}{\hat{Z}_{Qs}}\right)\right]=\frac{\hat{U}_{Ds}}{\hat{Z}_{Ds}}\hat{C}_D, \tag{10}$$

$$\hat{I}_{UQ}=\hat{U}_Q\frac{s}{\hat{Z}_{Ds}}\left[1+\frac{Rs}{\hat{Z}_{Ds}}+Rs^2\left(\frac{1}{\hat{Z}_{Qs}}-\frac{1}{\hat{Z}_{Ds}}\right)\right]=\frac{U_{Qs}}{\hat{Z}_{Qs}}\hat{C}_Q. \tag{10a}$$

Na podstawie otrzymanych wzorów widoczne jest, że w przypadku zupełnego pominięcia oporów czynnych twornika prądy $\hat{I}_{UD},\hat{I}_{UQ}$ oblicza się analogicznie jak prądy maszyny asynchronicznej (bez oporności czynnej w stojanie) przy przyjęciu odpowiednio innych wartości elementów schematu zastępczego dla osi podłużnej i poprzecznej.



Rys. 4. Pomocniczy schemat zastępczy maszyny synchronicznej pracującej przy stałym poślizgu

Na rysunku 4 uwidoczniono poszczególne elementy schematu zastępczego dla przyjętej częstotliwości poślizgu.

W wyniku formalnego podzielenia przez poślizg s impedancji obliczonych dla częstotliwości poślizgu zgodnie z wzorem (10) na schemacie zastępczym rysunku 4 reaktancje wyrażają się dla częstotliwości znamionowej, a oporności czynne występują ze współczynnikiem $1/s$. Napięcie zaznaczono formalnie zgodnie z wzorem (10) dla przyjętej kierunkowości prądu.

Dla przybliżonego uwzględnienia oporności czynnych twornika oraz dla założonych małych poślizgów obliczone w ten sposób prądy przy

pominięciu oporów czynnych twornika należy pomnożyć przez współczynnik korekcyjny $\hat{C}_D$, względnie $\hat{C}_Q$,

$$\hat{I}_{UD}=\hat{I}_{xD}\hat{C}_D, \qquad \hat{I}_{UQ}=\hat{I}_{xQ}\hat{C}_Q,$$

zgodnie z wyprowadzonymi wzorami (10).

Schemat zastępczy w osi podłużnej przedstawia się podobnie jak dla maszyny asynchronicznej z wirnikiem dwuklatkowym, w osi poprzecznej — analogicznie jak dla zwykłej maszyny asynchronicznej.

Dla uproszczenia analizy zakłada się, że dwie gałęzie obwodów wirnika w osi podłużnej można sprowadzić do jednej wypadkowej gałęzi $\left(\frac{R_w}{s}, X_w\right)$.

Odpowiada to ściśle przypadkowi jednakowego stosunku reaktancji rozproszenia i oporności czynnej gałęzi wzbudzenia i klatki. Dla dokładnej analizy należy indywidualnie dla każdej wartości poślizgu wyznaczyć zastępczą oporność i reaktancję. Ze względu na silną zmienność oporności czynnych gałęzi wirnika z częstotliwością, wskutek zjawiska wypierania prądu, analiza dokładna jest utrudniona.

Przy pominięciu oporów czynnych twornika prąd wirnika J_{xr} można obliczyć zgodnie z zasadą Thevenina wychodząc z zastępczego napięcia sieci U_z o wewnętrznej reaktancji X_z:

$$\hat{I}_{xrD}=-\frac{\hat{U}_{zD}}{j(X_{zD}+X_w)+\frac{R_w}{s}}=-\frac{\hat{U}_D X_{aD}}{X_D\left[j\left(\frac{X_s X_{aD}}{X_D}+X_w\right)+\frac{R_w}{s}\right]}, \tag{11}$$

$$\hat{I}_{xrQ}=-\frac{U_Q X_{aQ}}{X_Q\left[j\left(\frac{X_s X_{aQ}}{X_Q}+X_{kQ}\right)+\frac{R_{kQ}}{s}\right]}. \tag{11a}$$

Prąd ten wraz z prądem biegu jałowego (na schemacie zastępczym przy otwarciu gałęzi wirnika) składa się na prąd twornika

$$\hat{I}_{xD}=\frac{\hat{U}_D}{jX_D}-\frac{X_{aD}}{X_D}\hat{I}_{xrD}, \tag{12}$$

$$\hat{I}_{xQ}=\frac{\hat{U}_Q}{jX_Q}-\frac{X_{aQ}}{X_Q}\hat{I}_{xrQ}. \tag{12a}$$

Po przekształceniu

$$\hat{I}_{xD}=\frac{\hat{U}_D}{jX_D}+\hat{U}_D\frac{X_{aD}}{X_D^2}\frac{\frac{s}{R_w}-j\left(\frac{X_s X_{aD}}{X_D}+X_w\right)\frac{s^2}{R_w^2}}{1+\left(\frac{X_s X_{aD}}{X_D}+X_w\right)^2\frac{s^2}{R_w^2}}. \tag{13}$$

Po wprowadzeniu podstawowych parametrów maszyny synchronicznej

$$\hat{I}_{xD}=\frac{\hat{U}_D}{jX_D}+\hat{U}_D\frac{X_D-X'_D}{X_DX'_D}\frac{T'_D\beta-j(T'_D\beta)^2}{1+(T'_D\beta)^2}, \tag{14}$$

gdzie

$$T'_D=\frac{X_w+\dfrac{X_sX_{aD}}{X_D}}{R_w\omega_N},$$

$$X'_D=X_s+\frac{X_wX_{aD}}{X_w+X_{aD}};$$

X'_D – podłużna reaktancja przejściowa; $T'_D=T'_{D_0}\cdot\dfrac{X'_D}{X_D}$ – stała czasowa przebiegów przejściowych w osi podłużnej; $T'_{D_0}=\dfrac{X_w+X_{aD}}{R_w}$ – stała czasowa generatora przy otwartym tworniku.

Analogicznie dla osi poprzecznej

$$\hat{I}_Q=\frac{\hat{U}_Q}{jx_Q}+\hat{U}_Q\frac{X_Q-X'_Q}{X_QX'_Q}\frac{T_Q\beta-j(T'_Q\beta)^2}{1+(T'_Q\beta)^2,}, \tag{14a}$$

gdzie

$$T'_Q=\frac{X_{skQ}+\dfrac{X_sX_{aQ}}{X_Q}}{R_{kQ}},$$

$$X'_Q=X_s+\frac{X_{skQ}\cdot X_{aQ}}{X_{skQ}+X_{aQ}}.$$

Po przejściu z obliczonych wyżej wartości symbolicznych prądów na postać czasową otrzymuje się:

$$I_{xD}=U_m\left\{\left[\frac{1}{X_D}+\frac{X_D-X'_D}{X_DX'_D}\frac{(T'_D\beta)^2}{1+(T_D\beta)^2}\right]\cos\beta t-\frac{X_D-X'_D}{X_DX'_D}\frac{T_D\beta}{1+(T_D\beta)^2}\sin\beta t\right\},$$

$$I_{xQ}=U_m\left\{-\left[\frac{1}{X_Q}+\frac{X_Q-X'_Q}{X_QX'_Q}\frac{(T'_Q\beta)^2}{1+(T'_Q\beta)^2}\right]\sin\beta t-\frac{X_Q-X'_Q}{X_QX'_Q}\frac{T'_Q\beta}{1+(T'_Q\beta)^2}\cos\beta t\right\},$$

$$I_{xrD}=-U_m\left\{\left[\frac{X_D-X'_D}{X_{aD}X'_D}\frac{(T'_D\beta)^2}{1+(T'_D\beta)^2}\right]\cos\beta t-\frac{X_D-X'_D}{X_{aD}X'_D}\frac{T'_D\beta}{1+(T'_D\beta)^2}\sin\beta t\right\},$$

$$I_{xrQ}=U_m\left\{\left[\frac{X_Q-X'_Q}{X_QX'_Q}\frac{(T'_Q\beta)^2}{1+(T'_Q\beta)^2}\right]\sin\beta t+\frac{X_Q-X'_Q}{X_{aQ}X_Q}\frac{T'_Q\beta}{1+(T'_Q\beta)^2}\cos\beta t\right\}. \tag{15}$$

Przy uwzględnieniu poprawki $\hat{C}_Q, \hat{C}_D$ otrzymuje się odpowiednie wartości $I_{UD}, I_{UQ}, I_{UrD}, I_{UrQ}$.

Sumaryczny prąd podłużny i poprzeczny równy jest zgodnie z zasadą superpozycji sumie prądów składowych:

$$I_D = I_{ED} + I_{UD},$$
$$I_Q = I_{EQ} + I_{UQ}.$$

Ogólnie można przedstawić prąd I_D i I_Q w postaci czasowej:

$$I_D = A_D + 2B_D \sin \beta t + 2C_D \cos \beta t,$$
$$I_Q = A_Q + 2B_Q \cos \beta t + 2C_Q \sin \beta t,$$

względnie w postaci symetrycznej:

$$I_D = A_D + (B_D + B_Q) \sin \beta t + (B_D - B_Q) \sin \beta t + (C_D + C_Q) \cos \beta t + (C_D - C_Q) \cos \beta t,$$
$$I_Q = A_Q + (B_D + B_Q) \cos \beta t - (B_D - B_Q) \cos \beta t + (C_D + C_Q) \sin \beta t - (C_D - C_Q) \sin \beta t. \quad (16)$$

Po przejściu na fazowe wartości czasowe otrzymuje się:

$$I_a = I_D \cos(\omega t + a_0) + I_Q \sin(\omega t + a_0),$$

względnie ogólnie:

$$I_k = f_k(J_D, J_Q), \qquad k = a, b, c.$$

Po podstawieniu wyżej zaznaczonych wartości otrzymuje się

$$I_a = I_E \sin[(\omega_N + \beta)t + \varphi_E] + I_{U_1} \sin(\omega_N t + \varphi_{U_1}) + I_{U_2} \sin[(\omega_N + 2\beta)t + \varphi_{U_2}]. \quad (17)$$

W obwodach twornika pojawiają się prądy 3 różnych częstotliwości:

$$\omega_N, \quad \omega_N + \beta, \quad \omega_N + 2\beta.$$

Wynikające z superpozycji prądy oznaczone indeksem E pochodzą od wewnętrznej siły elektromotorycznej wirnika (zależnej od prądu wzbudzenia maszyny synchronicznej). Prądy oznaczone indeksem U obliczono przy założeniu niewzbudzonej maszyny. Zależą one tylko od napięcia przyłożonego do zacisków maszyny. Fizykalna przyczyna tego zjawiska leży w magnetycznej i elektrycznej dwuosiowej asymetrii wirnika.

Wskutek magnetycznej asymetrii ($X_q \neq X_d$) prąd magnesujący twornika pobierany z sieci pulsuje z podwójną częstotliwością poślizgu. Prąd taki można złożyć z 2 prądów o częstotliwości sumy i różnicy częstotliwości sieci i wirnika.

Elektryczna niesymetria obwodów wirnika powoduje indukowanie prądów wirnika, dających wypadkowy przepływ eliptyczny, który można złożyć z 2 przepływów wirujących względem rotora z szybkością kątową poślizgu $+\beta$ i $-\beta$. Jeden z nich unoszony przez wirnik jest w synchronizmie z polem wywołanym prądem częstotliwości sieci, drugi wiruje

względem niego z poślizgiem $2s$ i indukuje w tworniku prądy o częstotliwości $\omega_N(1+2s)=\omega_N+2\beta$.

Przy symetrii elektrycznej i magnetycznej obwodów wirnika w osi podłużnej i poprzecznej rotor przedstawia symetryczny obwód dwufazowy, w którym znika przepływ wirujący względem stojana z szybkością $\omega_N-2\beta$.

Prądy twornika częstotliwości $\omega=\omega_N+\beta$ są wynikiem przepływu (synchronicznego względem wirnika) wywołanego prądem wzbudzenia. Dla charakterystycznego przypadku szczególnego maszyny synchronicznej bez obwodów tłumiących wyznaczy się miejsca geometryczne wektora prądu twornika w abstrakcyjnej płaszczyźnie związanej z układem wirnika, wyznaczonej osiami D i Q przy pominięciu oporności czynnych twornika ($I_{xD}=I_{UD}$; $I_{XQ}=I_{UQ}$). Podporządkowując tej płaszczyźnie płaszczyznę zespoloną (wielkościom w osi podłużnej podporządkowuje się wartości rzeczywiste, wielkościom w osi poprzecznej przyporządkowuje się wartości urojone), otrzymuje się

$$\hat{I}=I_{ED}+I_{UD}+j(I_{EQ}+I_{UQ}).$$

Po podstawieniu (6) i (15) i odpowiednim symetrycznym uporządkowaniu

$$\begin{aligned}\hat{I}=\frac{\hat{E}_w}{jX_D}-\frac{\hat{U}}{2}e^{-j\beta t}\Bigg\{\left[\frac{1}{jX_Q}+\frac{1}{jX_D}\right]_A+\left[\frac{X_D-X'_D}{jX_DX'_D}\,\frac{(T'_D\beta)^2}{1+(T'_D\beta)^2}\right]_B-\\-\left[\frac{X_D-X'_D}{X_DX'_D}\,\frac{T'_D\beta}{1+(T'_D\beta)^2}\right]_C\Bigg\}_{\mathrm{I}}+\frac{\hat{U}}{2}e^{j\beta t}\Bigg\{\left[\frac{1}{jX_Q}-\frac{1}{jX_D}\right]_{A'}-\\-\left[\frac{X_D-X'_D}{jX_DX'_D}\,\frac{(T'_D\beta)^2}{1+(T'_D\beta)^2}\right]_{B'}-\left[\frac{X_D-X'_D}{X_DX'_D}\,\frac{T'_D\beta}{1+(T'_D\beta)^2}\right]_{C'}\Bigg\}_{\mathrm{II}},\end{aligned}\tag{18}$$

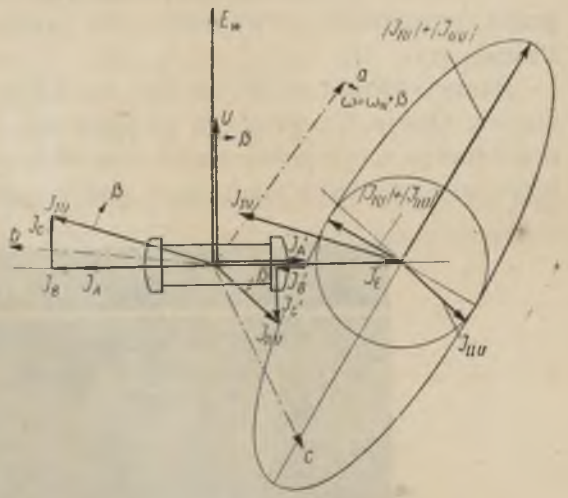
$$\hat{I}=\hat{I}_E+\hat{I}_{IU}+\hat{I}_{IIU},$$

$$\hat{I}_{IU}=\hat{I}_A+\hat{I}_B+\hat{I}_C,$$

$$I_{IIU}=\hat{I}_{A'}+\hat{I}_{B'}+\hat{I}_{C'}.$$

Na rysunku 5 przedstawiono poszczególne składowe wektora prądu twornika. Przebieg wektora prądu wyznacza elipsę w przyjętej płaszczyźnie wirnika. Rzuty wektora prądu na osi faz przedstawiają chwilowe wartości prądów fazowych. Biorąc pod uwagę ruch względny płaszczyzny wirnika względem stojana z szybkością kątową $\omega_N+\beta$ na rysunku zaznaczono wirowanie osi faz a,b,c (w kierunku przeciwnym do rzeczywistych obrotów wirnika) przy unieruchomionym wirniku.

Wektor prądu przedstawiono w płaszczyźnie przyporządkowanej osiom wirnika. Ruch wektora można również przedstawić w innej płaszczyźnie S, wirującej względem wirnika z szybkością kątową poślizgu, a zatem z szybkością synchroniczną względem twornika.

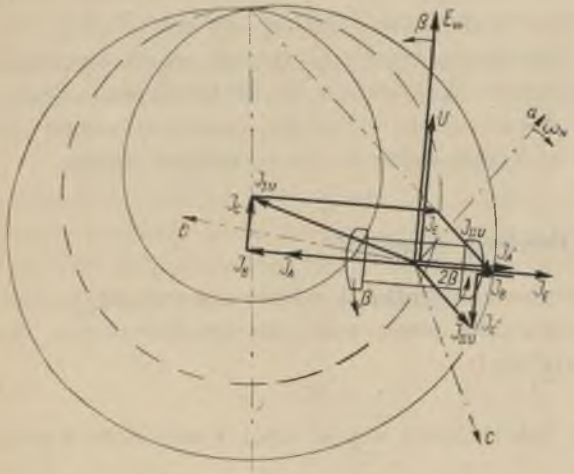


Rys. 5. Miejsca geometryczne uogólnionego wektora prądu w płaszczyźnie związanej z układem wirnika

Wartości wektora przedstawione w tych dwóch płaszczyznach zespolonych wiąże prosty związek:

$$\hat{\bar{I}}_{(s)} = \hat{\bar{I}} e^{-j\beta t} \tag{19}$$

(przyjęto, że osie rzeczywiste obu płaszczyzn zespolonych pokrywają się w chwili $t = 0$).



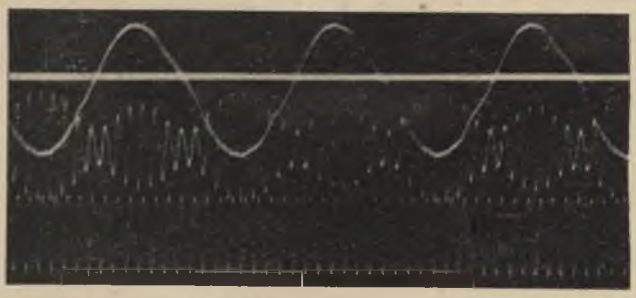
Rys. 6. Miejsca geometryczne uogólnionego wektora prądu w płaszczyźnie wirującej z szybkością synchroniczną sieci względem uzwojeń twornika

Porównując (18) i (19) otrzymuje się przebieg wektora prądu w płaszczyźnie s

$$\hat{\bar{I}}_{(s)} = \hat{\bar{I}}_E e^{j\beta t} - \hat{\bar{I}}_{1U} + \hat{\bar{I}}_{IIU} e^{j2\beta t}. \tag{20}$$

W tej nowej płaszczyźnie zespolonej miejsce geometryczne wektora prądu wyznaczone równaniem (20) przekształca się z elipsy w ślimak Pascala (rys. 6).

Rzuty wektora prądu na osie faz a, b, c wyznaczają chwilowe wartości fazowe. Osie a, b, c wirują w płaszczyźnie S z szybkością ω_N. Rysunek 7 przedstawia oscylogram prądu twornika maszyny synchronicznej jawnobiegunowej średniej mocy przy stałym poślizgu wirnika zdjęty w czasie



Rys. 7. Oscylogram pracy maszyny synchronicznej przy stałym poślizgu po wypadnięciu z taktu

pierwszy przebieg od góry — prąd wzbudzenia
drugi „ „ „ — prąd twornika (stojana)
trzeci „ „ „ — napięcie sieci

pomiarów granicy stateczności po wypadnięciu z taktu. Przebieg pierwszy przedstawia przyłożone do zacisków twornika sztywne napięcie sieci. Przebieg drugi przedstawia prąd jednej fazy twornika. Przebieg trzeci przedstawia prąd w uzwojeniu wzbudzenia. Poślizg wynosił 6,3%. Na oscylogramie widoczny jest charakterystyczny przebieg prądu twornika będący efektem zdudnienia prądów składowych 3 częstotliwości. Różne amplitudy obwiedniej prądu odpowiadają położeniu wektora prądu na rysunku 5 w sąsiedztwie górnych lub dolnych wierzchołków elipsy.

3. Przebiegi momentu

Przebiegi uogólnionych prądów twornika i wirnika wyznaczają momenty elektromagnetyczne rozwijane przez maszynę synchroniczną. Na podstawie wzoru (2) otrzymuje się [1]:

[1] Wartości prądów, reaktancji, indukcyjności, napięć, mocy i momentów wyraża się w jednostkach stosunkowych.

$$M_e = -[X_{aD}(I_{EQ}+I_{UQ})(I_{*}+I_{UrD})+(X_D-X_Q)(I_{EQ}+I_{UQ})(I_{ED}+I_{UD})- -X_{aQ}(I_{ED}+I_{UD})I_{UrQ}, \quad (21)$$

Do wzoru należy wstawić skorygowane wartości prądów $I_{UD}, I_{UQ}, I_{UrD}, I_{UrQ}$ ze względu na odpływ oporu czynnego twornika.

$$\hat{C}_D = 1+\frac{R}{jX_Q}+R\left(\frac{1}{jX_D}-\frac{1}{jX_Q}\right)s,$$

$$\hat{C}_Q = 1+\frac{R}{jX_D}+R\left(\frac{1}{jX_Q}-\frac{1}{jX_D}\right)s.$$

W wyrażeniu na moment można wyodrębnić składniki zależne od prądu wzbudzenia, od napięcia sieci oraz prądu wzbudzenia i napięcia sieci:

$$M_e = M_{E^2}+M_{UE}+M_{U^2}.$$

3.1. Moment zależny od prądu wzbudzenia

$$M_{E^2} = \frac{E_w^2\frac{R}{X_D}(1+s)}{X_Q\left[(1+s)^2+\frac{R^2}{X_Q X_D}\right]} - \frac{E_w^2(1+s)^3\left(1-\frac{X_Q}{X_D}\right)\frac{R}{X_D}}{X_Q\left[(1+s)^2+\frac{R^2}{X_Q X_D}\right]^2}. \quad (22)$$

W przypadku symetrii magnetycznej wirnika ($X_D = X_Q = X$) moment ten wyraża się:

$$M_{E^2} = \frac{E_w^2}{X}\frac{\frac{R}{X}}{(1+s)^2+\left(\frac{R}{X}\right)^2}. \quad (22a)$$

Ze względu na to że moment ten stanowi podstawowy moment hamujący przy zwarciu ustalonym generatora, bywa czasami nazywany momentem zwarcia. Moment hamujący spowodowany jest stratami w miedzi w obwodzie twornika.

Moment ten odgrywa ważną rolę w czasie kołysań elektromechanicznych wirnika przy pracy równoległej. Wskutek zmian szybkości wirnika moment ten zmienia się w funkcji poślizgu.

Dla małych wychyleń z szybkości synchronicznej przyrosty momentu hamującego grają rolę tłumienia kołysań wirnika i wyrażają się:

$$\frac{\partial M_{E^2}}{\partial \beta}\Delta\beta = -\frac{E_w^2}{X}\frac{\frac{R}{X}\left[1-\left(\frac{R}{X}\right)^2\right]}{\left[1+\left(\frac{R}{X}\right)^2\right]}\frac{\Delta\beta}{\omega_N}. \quad (23)$$

Wyrażając stosunek $\frac{R}{X} = \operatorname{tg} \varrho$, otrzymuje się

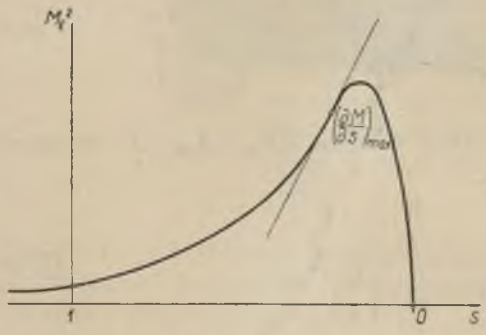
$$\frac{\partial M_{E^2}}{\partial \beta} = -\frac{E_w^2}{X} \frac{\sin 4\varrho}{4\omega_N}. \tag{24}$$

Dla założonych małych oporności czynnych można przyjąć praktycznie

$$\frac{\partial M_{E^2}}{\partial \beta} = -\frac{E_w}{X\omega_N} \sin \varrho. \tag{24 a}$$

Otrzymany ujemny znak przyrostów momentu oznacza, że przyrostowi obrotów towarzyszy zmniejszenie momentu hamującego, co dla analizy dynamiki kołysania ujawnia się ujemnym współczynnikiem tłumienia. Fizykalnie można interpretować powyższy moment jako moment asynchroniczny rozwijany przez symetryczny twornik wraz z siecią (reprezentujący klatkę silnika asynchronicznego), zanurzony w unoszonym polu wirującym wytworzonym prądem wzbudzenia generatora.

Poślizg klatki przy obrotach synchronicznych wirnika równa się jedności.



Rys. 8. Charakterystyka momentu asynchronicznego maszyny synchronicznej wywołanego względnym ruchem tworznika (uzwojenie wtórne) i pola uzwojenia wzbudzenia (uzwojenie pierwotne)

Przy wzroście obrotów wirnika, a zatem rosnącym poślizgu, moment asynchroniczny maleje $\left(\text{nachylenie } \frac{\partial M}{\partial s} < 0\right)$. Maksymalny ujemny współczynnik tłumienia odpowiada dla

$$\sin 4\varrho = 1; \quad \text{stąd} \quad \varrho = \frac{\pi}{8} \quad \text{i} \quad \text{wynosi} \quad \frac{E_w^2}{4X}.$$

Przy dużych opornościach sieci tłumienie to może między innymi przyczyniać się do narastania kołysań wirnika przy pracy równoległej.

3.2. Moment zależny od napięcia sieci i prądu wzbudzenia

Przy założeniu małych poślizgów i przy przybliżonym uwzględnieniu oporności czynnej stojana otrzymuje się dla maszyny synchronicznej bez

dodatkowych obwodów tłumiących wirnika:

$$M_{EU}=\frac{E_w U_m}{X_D}\left[\sin\beta t-\left(\frac{2-s}{X_D}-\frac{1-s}{X_Q}\right)R\cos\beta t\right]_{\mathrm{I}}+$$
$$+\left[\frac{E_w U_m R X_Q}{X_D X_Q+R^2}\,\frac{X_D-X'_D}{X_D X'_D}\,T'_d\beta\left(\sin\beta t-\frac{R}{X_Q}c_0\beta t\right)\right]_{\mathrm{II}}, \qquad (25)$$
$$M_{EU}=M_{EU\mathrm{I}}+M_{EU\mathrm{II}}.$$

Składowy moment $M_{EU\mathrm{I}}$ wyraża tak zwany moment synchroniczny zależny od kąta mocy $\vartheta=\beta t$ przy przybliżonym uwzględnieniu oporności czynnej twornika. Moment ten w małym stopniu zależy od poślizgu i dla obrotów synchronicznych wyraża się:

$$M_{\mathrm{synchr}}=\frac{E_w U_m}{X_D}\left[\sin\vartheta-\left(\frac{2}{X_D}-\frac{1}{X_Q}\right)R\cos\vartheta\right]. \qquad (26)$$

Składowy moment $M_{EU\mathrm{II}}$ zależny dla małych poślizgów proporcjonalnie od poslizgu przedstawia moment tłumienia, grający ważną rolę w czasie kołysań wirnika przy pracy równoległej. (Ze względu na silny wpływ tego momentu na stabilność pracy uwzględniono dokładniej wpływ oporności czynnej twornika).

Dla szczególnego przypadku magnetycznej symetrii wirnika $X_Q=X_D$ moment ten można przedstawić wprowadzając $\operatorname{tg}\varrho=\frac{R}{X}$:

$$M_{EU\mathrm{II}}=\frac{E_w U_m}{X_D}\,\frac{X_D-X_D}{X'_D}\,T'_D\cdot s\,\frac{\sin 2\varrho}{2\cos\varrho}\sin(\beta t+\varrho). \qquad (27)$$

Współczynnik tłumienia

$$\frac{\partial M_{EU\mathrm{II}}}{\partial\beta}=\frac{E_w U_m}{X_D}\,\frac{X_D-X'_D}{X'_D}\,T'_D\,\frac{\sin 2\varrho}{2\cos\varrho}\sin(\vartheta-\varrho). \qquad (28)$$

Przy pracy prądnicowej ($\vartheta>0$) dla małych kątów mocy współczynnik tłumienia może być ujemny, przy pracy silnikowej $\vartheta<0$ współczynnik ten jest zawsze ujemny.

W przypadkach dużej oporności sieci współczynnik ten może powodować pracę niestabilną prądnicy (rozkołysanie). Przy stałym poślizgu wirnika, różnym od zera, średnia wartość momentu M_{EU} równa się zeru. Wszystkie składowe są funkcjami periodycznymi kąta mocy.

3.3. Moment zależny od napięcia sieci

$$M_{U^2}=M_{Ur}+M_{Ua},$$
$$M_{Ur}=U_m^2\,\frac{X_D-X_Q}{2X_Q X_D}\left[\sin 2\beta t-\left(\frac{1}{X_Q}+\frac{1}{X_D}\right)R\cos 2\beta t+R\left(\frac{1}{X_Q}-\frac{1}{X_D}\right)(1-2s)\right]. \qquad (29)$$

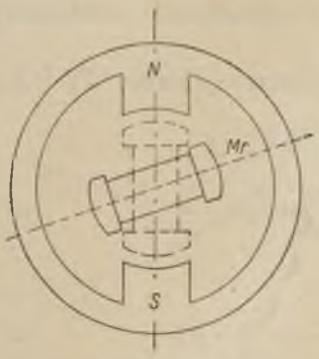
Składowa M_{Ur} momentu M_{U2}, niezależna od prądów indukowanych w obwodach wirnika poślizgu, przedstawia moment reaktywny maszyny synchronicznej wynikający z magnetycznej niesymetrii wirnika $X_Q \neq X_D$, będący funkcją podwójnego kąta mocy $2\beta t = 2\vartheta$. Okres zmienności w funkcji kąta mocy tego momentu reaktywnego jest dwukrotnie mniejszy od okresu zmienności momentu synchronicznego.

Maszyna synchroniczna na obrotach synchronicznych, przy otwartym obwodzie wzbudzenia i bez wszelkich obwodów tłumiących, rozwija moment reaktywny zależny tylko od napięcia zasilania i kąta mocy.

Maksimum mocy osiągane jest przy kącie $\pm 45^0$ oraz $\pm 225^0$. Maszyna może pracować stabilnie w zakresie $0 \div \pm 45^0$ oraz $\pm(180^0 \div +225^0)$ (kąt ujemny dla pracy silnikowej).

W tych zakresach charakterystyka kątowa mocy posiada dodatni moment synchronizujący (pochodna $\partial M_{Ur}/\partial\vartheta$ dodatnia).

Zwiększeniu obciążenia towarzyszy powiększenie kąta mocy. Fizykalna przyczyna powstawania momentu reaktywnego widoczna jest na modelu przedstawionym na rysunku 9.



Rys. 9. Model wyjaśniający powstanie momentu reaktywnego maszyny synchronicznej

Na obrotach synchronicznych pole wirujące stojana i wirnik względem siebie są nieruchome, można je zatem przedstawić jak na rysunku.

Przy wysunięciu osi podłużnej wirnika działa moment dążący do zwiększenia przewodności magnetycznej strumienia. Uwidocznione we wzorze (29) składowe momentu reaktywnego, zależne w niewielkim stopniu od poślizgu, uwzględniają wpływ oporności czynnej twornika. Charakterystyczny człon stały niezależny od kąta mocy pochodzi od przepływu powstałego wskutek niesymetrii magnetycznej, wirującego względem pola synchronicznego z podwójną szybkością poślizgu ($\hat{I}_{UII}$ we wzorze (20)).

Przepływ ten oddziałując na twornik indukuje w nim prądy częstotliwości sumy częstotliwości napięcia i podwójnej częstotliwości poślizgu, które przy obecności oporów czynnych stojana i sieci rozwijają moment asynchroniczny zależny odpowiednio od poślizgu tego przepływu względem obwodów twornika równego $(1+2s)$. Przy obrotach synchronicznych wypadkowy moment wyraża się:

$$M_{Ur} = U_m^2 \frac{X_D - X_Q}{X_D X_Q}\left[\sin 2\vartheta - R\left(\frac{1}{X_Q}+\frac{1}{X_D}\right)\cos 2\vartheta + R\left(\frac{1}{X_Q}-\frac{1}{X_D}\right)\right]. \quad (30)$$

Wskutek oporności czynnej twornika pojawia się składowa stała momentu niezależna od kąta mocy.

Przy obrotach asynchronicznych moment reaktywny daje prócz momentów periodycznie zmiennych moment średni

$$M_{Urśr} = U_m^2 \left(\frac{X_D - X_Q}{X_D X_Q}\right)^2 \frac{R(1-2s)}{2}. \tag{31}$$

Przy przybliżonym uwzględnieniu wpływu oporności czynnej twornika dla dowolnych poślizgów we wzorach (9), (10) otrzymuje się przybliżone wyrażenie tego momentu:

$$M_{Urśr} = \frac{U_m^2}{2}\left(\frac{1}{X_Q} - \frac{1}{X_D}\right)^2 \frac{(1+2s)R}{(1+2s)^2 + \left(\frac{R}{X_D} + \frac{R}{X_Q}\right)s^2}. \tag{32}$$

Moment ten zmienia znak przy poślizgu $s = -\frac{1}{2}$, co również wynika jasno z powyżej przytoczonego fizykalnego uzasadnienia przyczyny jego powstania.

Przy dużej oporności sieci twornika silnik synchroniczny może rozruszyć się do połowy obrotów synchronicznych dzięki momentowi reaktywnemu, a zatem przy otwartym obwodzie wzbudzenia i braku wszelkich obwodów tłumiących

$$M_{Ua} = \frac{U_m^2}{2} \frac{X_D - X'_D}{X_D X'_D} \frac{\beta T'_D}{1+(\beta T'_D)^2}\left[1 - \sqrt{1+(T'_D\beta)^2}\cos(2\beta t + \operatorname{arc\,tg} T'_D\beta) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{R}{X_D} - \frac{R}{X_D}\right) T'_D\beta - \sqrt{1+(T'_D\beta)^2}\left(\frac{1}{X_Q} + \frac{1}{X_D}\right) R \sin(2\beta t + \operatorname{arc\,tg} T'_D\beta)\right]. \tag{33}$$

Otrzymana składowa M_{Ua} momentu zależnego od napięcia sieci i od poślizgu określa moment asynchroniczny maszyny asynchronicznej dla małych poślizgów przy przybliżonym uwzględnieniu oporności twornika. Moment ten, proporcjonalny do poślizgu, gra podstawową rolę momentu tłumiącego w czasie kołysań maszyny synchronicznej.

Pomijając znikomy wpływ oporności czynnych twornika na moment asynchroniczny, otrzymuje się asynchroniczny współczynnik tłumienia:

$$\frac{\partial M}{\partial \beta} = \frac{U_m^2}{2} \frac{X_D - X'_D}{X_D X'_D} T'_D \sin^2 \beta t. \tag{34}$$

W odróżnieniu od poprzednich współczynników tłumienia jest on zawsze dodatni, co ma wpływ decydujący na stabilność pracy maszyny synchronicznej. Ze względu na to, że moment ten rośnie dla większych kątów mocy, powoduje on ograniczenie amplitudy kołysań własnych maszyny synchronicznej, spowodowanych poprzednio wypro-

wadzonym ujemnym współczynnikiem tłumienia, szczególnie przy biegu luzem generatora (małe kąty mocy) przyłączonego do sieci.

Ponieważ w powyższych rozważaniach przebiegów momentów założono małe poślizgi maszyny synchronicznej, w celu prostego uwzględnienia małych oporności czynnych stojana (współczynnik korekcyjny dla prądów $\hat{C}_Q, \hat{C}_D$). W granicznym przypadku pominięcia oporów czynnych twornika wzory (25), (26) i (29), (30) i (33) oraz (34) przedstawiają ściśle przebieg momentu dla dowolnych poślizgów.

Dla większości generatorów synchronicznych pominięcie oporności czynnych twornika dla obliczenia prądów i momentów powoduje znikanie odchyłki od przebiegów rzeczywistych. Przy znikomych poślizgach wirnika moment synchroniczny i reaktywny przeważa w wypadkowym momencie maszyny; przyjmuje on przy tym dla maszyn jawnobiegunowych przeciętnie $X_D = 1{,}5$; $X_D = 0{,}1 X'_D$ maksymalny moment reaktywny wynosi około 15% momentu znamionowego. Średnia wartość momentu synchronicznego i reaktywnego przy pominięciu oporów czynnych twornika równa jest zeru przy założonym stałym poślizgu wirnika. Przy większych poślizgach podstawową rolę odgrywa moment asynchroniczny dający średni moment zależny od poślizgu. Przy pominięciu oporności czynnych twornika przebieg momentu średniego określony jest równaniem Klossa

$$M_{U\,\text{śr}} = \frac{2 M_m}{\frac{s}{s_m} + \frac{s_m}{s}}, \tag{35}$$

gdzie moment maksymalny

$$M_m = \frac{U_m^2}{4} \frac{X_D - X'_D}{X_D X'_D},$$

oraz poślizg przy maksymalnym momencie

$$s_m = \frac{1}{T'_D \omega_N}.$$

Przyjmując przeciętnie dla dużych maszyn jawnobiegunowych (hydrogeneratory):

$$X_D = 1{,}5; \qquad X'_D = 0{,}3; \qquad T'_D = T'_{D_0} \frac{X'_D}{X_D} = 3 \cdot \frac{0{,}3}{1{,}5} = 0{,}6 \text{ sek},$$

otrzymuje się początkową stromość charakterystyki momentu, wyrażoną jako przyrost momentu na jeden procent poślizgu $2{,}5 \frac{M_N}{1\%}$.

Znaczna stromość momentu asynchronicznego wpływa na przebiegi zachodzące w maszynie przy poślizgach wirnika, np. w czasie samosynchronizacji generatorów przy początkowym poślizgu wirnika w chwili przyłączenia do sieci lub w czasie zaburzeń elektrodynamicznych układu maszyn synchronicznych pracujących równolegle.

Wpłynęło w czerwcu 1954 r.

LITERATURA

[1] W. Kołek, W. Paszek, *Równania wyjściowe dla analizy przebiegów w maszynie synchronicznej*, Zesz. Nauk. Pol. Śl. „Elektryka" Nr 3, 1955.
[2] А. А. Горев, *Переходные процессы синхронной машины*, Госэнергоиздат, Москва 1950.
[3] K. H. Park, *Two Reaction Theory of Synchronous Machines*, Part I i II, AIEE Trans. 1929.
[4] T. Bödefeld, H. Sequenz, *Elektrische Maschinen*, Wien 1949.
[5] A. Timascheff, *Stabilität elektrischer Drehstrom-Kraftübertragungen*, 1940.